



TITLE:

磁化プラズマ中の2次元乱流に関する位相空間内の解析 (乱流の普遍性と個別性:流体乱流を通して宇宙を見る)

AUTHOR(S):

龍野, 智哉

CITATION:

龍野, 智哉. 磁化プラズマ中の2次元乱流に関する位相空間内の解析 (乱流の普遍性と個別性:流体乱流を通して宇宙を見る). 数理解析研究所講究録 2013, 1822: 35-46

ISSUE DATE:

2013-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194700>

RIGHT:

磁化プラズマ中の2次元乱流に関する位相空間内の解析

電気通信大学 情報・通信工学専攻 龍野 智哉 (Tomoya TATSUNO)¹

Department of Communication Engineering and Informatics,
The University of Electro-Communications

1 はじめに

通常, 流体ではその密度や速度, 圧力など巨視的な物理量が位置の関数として時間発展するように記述される. 微視的に見ると流体は多数の粒子から構成されているが, 粒子間の衝突が充分頻繁に起こり, 流体要素は変形を受けたとしてもすぐさま局所的な熱平衡状態に移ることができる. 時間スケールでいえば, 粒子間衝突が流体の (巨視的な) ダイナミクスに比べて十分に速く起こることであるし, 空間スケールでいえば, 粒子の平均自由行程が流体の空間的不均一性に比べて十分に小さいということであって, これら時空間スケールの分離が極めて良い近似として成り立っているわけである.

ところが宇宙空間や実験室で見られる完全電離したプラズマでは, 粒子密度が小さいために衝突の頻度が比較的小さく, 衝突とダイナミクスのスケール分離ができない. 近年, 核融合実験装置 [1, 2] や太陽風 [3-5] の観測からは, 平均自由行程や磁化された粒子の Larmor 回転半径よりも小さい空間スケールの揺動が観測されるようになってきた. これら小スケールにおける現象を解析するためには局所熱平衡の仮定は妥当ではなく, 各点で粒子の速度分布関数を追跡する Boltzmann 方程式のような, 位相空間において運動を記述する理論的枠組みが必要となる.

そうすると, 大スケールから乱流によってカスケードしてきたエネルギーが, こういった小スケールにおいてどのように散逸するかというのは自明ではない. というのは, 不可逆な散逸は Boltzmann 方程式においては衝突で実現されるが, この衝突は速度空間の拡散型作用素で記述されるからである [6]. 通常の流体を記述する Navier-Stokes 方程式では, 位置に関する空間の拡散作用素で粘性散逸が記述され, この粘性項は移流項に比べて微分の階数が高いため, 小スケールの構造を生成することによって効果的に働かせることができる. 位相空間における乱流で同じように小スケール構造を作って散逸させるには, その小スケール構造は速度空間に生成されなければならない. 以下では, 速度空間構造生成のメカニズムと, 位相空間における乱流現象について, 磁化プラズマを例にとった最近の研究成果を概観する.

まず 2 節では, 用語と概念の整理のため古典的な乱流の現象論について Kolmogorov や Obukhov の展開した現象論について簡単にまとめる. 次に 3 節でプラズマ中の乱流を位相空間で記述するためのモデルを導入し, 速度空間構造の生成メカニズムについて解説する. 4 節では磁化プラズマ中の位相空間乱流が NS 乱流の理論を拡張したエントロピーのカスケードで説明できることを示し, 最近のシミュレーション結果を紹介する [7]. 5 節では自由減衰乱流について概観し, 無衝突保存量の減衰則を導出する. 最後に 6 節でまとめを行う.

¹tomo.tatsuno@uec.ac.jp

2 Navier-Stokes 乱流

位相空間の問題に入る前に、用語と概念の整理のため、3次元の古典的な流体乱流について簡単に述べる。古典的な流体の支配方程式として、ここでは非圧縮の Navier-Stokes (NS) 方程式

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

を考える。\$\mathbf{u}\$ は流体の速度ベクトル、\$p\$ は圧力、\$\nu\$ は粘性を表し、通常は小さいと考えられる。簡単のため質量密度は 1 とした。流体におけるこれらの物理量は、場所 \$\mathbf{r}\$ と時間 \$t\$ のみの関数である。

(1)-(2) を適当な境界条件 (例えば周期境界条件) の下で積分すると、系の運動エネルギー

$$E_{\text{NS}} := \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{r} \quad (3)$$

は

$$\frac{dE_{\text{NS}}}{dt} = -\nu \int |\nabla \times \mathbf{u}|^2 d\mathbf{r} \quad (4)$$

にしたがって変化することがわかる。すなわち \$E_{\text{NS}}\$ は粘性によってのみ減少する。(1)を見ると粘性項は他の項に比べて空間微分の階数が高い。従って、大スケールで注入されたエネルギーは、小スケールの構造を生成することによって効果的に散逸される。

乱流現象を普遍的に理解するため、Kolmogorov は、

(i) 空間の一様等方性

(ii) 相互作用のスケール局所性

(iii) 慣性領域 (散逸のない領域) の存在

を仮定して、駆動に左右されない中程度以下のスケールにおける現象的な理論を展開した [8-10]。まず仮定 (i) から 3次元空間のどの方向にも単一のスケール長 \$\ell\$ が導入できる。上で述べたように大スケールで注入されたエネルギーは小スケールに運ばれるわけであるが、この際に仮定 (ii) より、同程度のスケールの渦のみが効果的に相互作用すると考える。つまり大スケールから直接的に小スケール構造が生成されるのではなく、同程度の渦同士が崩れ合って徐々に小さいスケールへと連続的に変化するとする。そして、仮定 (iii) より、それらの渦がもつエネルギーが中程度のスケール (慣性領域) では減少せず、小スケール (散逸領域) でのみ粘性によって散逸されると考える。

以上の考えを次元解析の形にまとめると、まず慣性領域においてエネルギーがスケール間をカスケードすることから、単位時間あたりのエネルギー束

$$\varepsilon := \frac{u_\ell^2}{\tau_\ell} \quad (5)$$

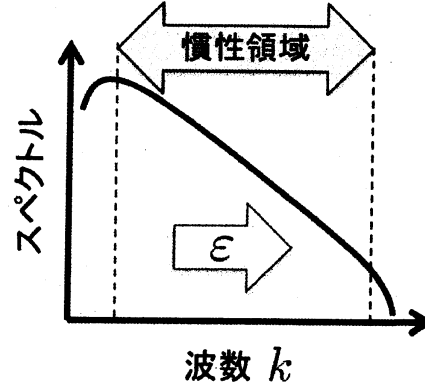


図 1: 乱流スペクトルとエネルギーカスケードの概念図.

がスケール ℓ に依らず一定であると考えられる. ここで添字の ℓ はスケール ℓ での物理量の平均値を示し, τ は非線形相互作用の特徴時間 (非線形相関時間) を表す. 次に非線形相関時間が (1) の非線形項で定まることから

$$\tau_\ell \sim \frac{\ell}{u_\ell} \quad (6)$$

と書ける. これを (5) に代入すると $u_\ell \propto \ell^{1/3}$ を得るが, ここに $u_\ell^2 \sim \int_{\ell^{-1}} \hat{E}(k) dk$, $k \sim \ell^{-1}$ などを用いると, エネルギーの波数スペクトル

$$\hat{E}(k) \propto k^{-5/3} \quad (7)$$

が求められる. (6) 式より非線形相関時間は $\tau_\ell \propto \ell^{2/3}$ でスケールするが, 粘性散逸の効果は ℓ^2 でスケールするため, あるスケール以下で散逸が非線形性を卓越するようになる. スペクトル (7) のカットオフスケール ℓ_c では非線形相関時間と粘性の特徴時間が一致し,

$$\tau_{\ell_c} \sim \frac{\ell_c^2}{\nu} \quad (8)$$

より

$$\ell_c \propto \nu^{3/4} \quad (9)$$

と求められる.

2次元の場合にはエネルギー E_{NS} に加え, 渦度の2次形式であるエンストロフィー Z_{NS} も非粘性保存量となる. この場合, 高階微分を含む保存量であるエンストロフィーが小スケールへカスケードし, エネルギーは大スケールへと逆カスケードを引き起こすと考えられている [11,12]. 紙面の都合上, 式の導出は割愛する.

3 Boltzmann 方程式の簡約化と非線形位相混合

さて, この節では完全電離した希薄プラズマの運動を位相空間で記述するモデル方程式を導入する. 磁場 B によって磁化されたプラズマを考えると, 磁力線方向には張力が働くため

曲げにくい、磁力線に垂直な方向には比較的自由に変形できるため、それぞれの方向におけるスケール長を $\ell_{\parallel}, \ell_{\perp}$ とすれば、揺動は典型的に $\ell_{\parallel} \gg \ell_{\perp}$ と非等方になる。磁化された荷電粒子は第一義的には磁力線のまわりを旋回運動し、弱い電場 E に対しては $E \times B$ ドリフトという横滑り運動を示す。揺動がドリフト運動によって支配されており、旋回運動がドリフト運動より速いとき、旋回運動について運動を平均化することができる。また粒子の速度分布関数が背景の Maxwell 分布 F_0 とそこからの微小なずれ δf に分離され、

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F_0(\mathbf{v}) + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (10)$$

と書けるとする。ここで $v = |\mathbf{v}|$ である。背景の Maxwell 分布は磁力線方向と垂直方向に異なる温度を仮定することもできるが、ここでは簡単のために等方な温度をもつとした。位相空間におけるダイナミクスを取り扱うので、 \mathbf{v} は \mathbf{r} と同じく座標を表すことに注意された。オーダーに関する仮定をまとめれば

$$\frac{\omega}{\Omega} \sim \frac{\ell_{\perp}}{\ell_{\parallel}} \sim \frac{|q\varphi|}{T_0} \sim \frac{|\delta f|}{F_0} \sim \epsilon \ll 1 \quad (11)$$

と書ける。ただしここで $\Omega := qB/m$ は電荷 q 、質量 m をもつ荷電粒子の磁場の大きさ $B := |\mathbf{B}|$ 中での旋回周波数、 ω は揺動の特徴的周波数、 T_0 は F_0 に対応する温度、 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ は静電ポテンシャルを表す。

粒子の旋回運動 (ジャイロ運動) を平均化したリングの運動を追跡するために、粒子位置 \mathbf{r} に対するリングの中心位置 \mathbf{R} を

$$\mathbf{R} := \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{b}}{\Omega} \quad (12)$$

と定義する [13]。ただし $\mathbf{b} := \mathbf{B}/B$ とした。右辺第 2 項は粒子の位置から旋回中心を指すベクトルであり、旋回半径が粒子速度に比例することがわかる。さてここで、摂動分布関数 δf を旋回角 θ について平均化 (ジャイロ平均) し、リングの分布関数 g を導入する:

$$g(\mathbf{R}, v_{\perp}, v_{\parallel}, t) = \langle \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle_{\mathbf{R}} := \frac{1}{2\pi} \oint \delta f \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{b}}{\Omega}, \mathbf{v}, t \right) d\theta. \quad (13)$$

このとき角速度 θ の積分は旋回中心 \mathbf{R} を固定して行うものとする。 g は中心の位置 \mathbf{R} 、磁力線方向に速度 v_{\parallel} で動く、半径 v_{\perp}/Ω をもったリングの時刻 t における分布関数を表すと考えられる。

Boltzmann 方程式を (11) 式に従ってオーダーリングし、(13) 式で表されるジャイロ平均を行うと、3次元空間におけるジャイロ運動論方程式 [14–17] が得られるが、ここではさらに磁力線方向 (以後 z 軸に取る) の変化が無視できると仮定して簡約化した

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{B} \{ \langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}}, g \} = \langle C(h) \rangle_{\mathbf{R}} \quad (14)$$

を用いることにする。ここで $\{ \cdot, \cdot \}$ は 2次元 (x, y) 平面内の Poisson 括弧、 $h(\mathbf{R}, v_{\perp}, v_{\parallel}, t) := g + qF_0 \langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}}/T_0$ 、 C は衝突作用素である [18]。 (14) 式の左辺第 2 項は揺動ポテンシャルによる $E \times B$ ドリフトの効果を表すが、ジャイロ平均されたポテンシャルはリングの半径 v_{\perp}/Ω によって異なることに注意する必要がある。つまり、ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r}, t)$ は粒子の速度 \mathbf{v}

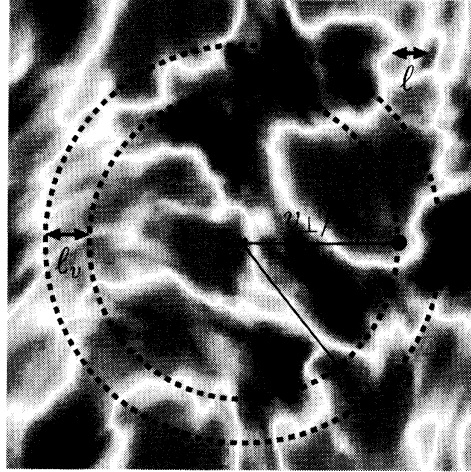


図 2: 非線形位相混合のイメージ. 紙面に垂直な磁場があると, 荷電粒子は Lorentz 力によって紙面上で旋回運動をする. ジャイロ運動論では粒子 (• 印) の旋回中心 (× 印) は粒子の円軌道 (点線) を平均化した静電ポテンシャル (カラープロット) を感じてドリフト運動する. ポテンシャルの揺動が熱粒子の旋回半径 v_{th}/Ω と同程度かそれよりも小さいスケール ℓ に生成されると, 平均化されたポテンシャルは旋回半径が $\ell_v := \delta v/\Omega$ 程度異なる旋回中心に相関のない応答を引き起こし, $\ell_v \sim \ell$ なる構造を速度空間に生成する. 図は文献 [7] より.

とは無関係な量であるが, ジャイロ平均されたポテンシャル $\langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}, v_{\perp}, t)$ は速度 v_{\perp} に依存するため, 速度空間に構造生成を引き起こす (図 2 参照). この効果を非線形位相混合と呼ぶ [19]. ポテンシャルは, δn_e と δn_i をそれぞれ電子とイオンの密度揺動として準中性条件 $\delta n_e = \delta n_i$ から定められる. 2次元の場合電子密度はパッシブスカラーとなるが, 初期に擾乱がなければその後も $\delta n_e = 0$ とできて,

$$\frac{q^2 n_0}{T_0} \varphi = q \int \langle h \rangle_{\mathbf{r}} d\mathbf{v} = q \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \int J_0 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \hat{h} d\mathbf{v} \quad (15)$$

を得る. ここで $\hat{\cdot}$ は Fourier 振幅, J_0 は 0 次の Bessel 関数を表す. ポテンシャルは旋回中心でなく粒子位置を固定した速度積分 $\int \langle \cdot \rangle_{\mathbf{r}} d\mathbf{v}$ によって与えられる. (15) 式からわかるように, ジャイロ平均は Fourier 空間では Bessel 関数の掛け算で表される. ジャイロ運動論方程式 (14)-(15) は, 熱速度を持つ粒子の旋回半径 $\rho := v_{th}/\Omega$ よりも大きいスケールの極限 $k_{\perp} \rho \ll 1$ で 2次元の NS 方程式に漸近することが示せる [20, 21]. このとき静電ポテンシャル φ は非圧縮流の流れ関数と理解できる.

無衝突 ($C = 0$) ジャイロ運動論方程式 (14)-(15) は次の 2つのエネルギーを保存する:

$$W := \frac{T_0}{2V} \int \frac{g^2}{F_0} d\mathbf{R} d\mathbf{v}, \quad (16)$$

$$E := \frac{q^2 n_0}{2T_0 V} \int \varphi^2 - \varphi \langle \langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}} \rangle_{\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (17)$$

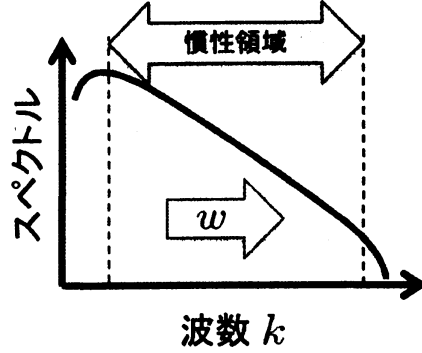


図 3: 乱流スペクトルとエントロピーカスケードの概念図.

ここで V は領域の体積, n_0 は F_0 に対応する粒子密度を表す. W は (14) 式より明らかなように正定値であるが, E も Fourier 空間で書くと正定値となることがわかる. W はエントロピー $-\int f \log f \, dr \, dv$ の摂動部分の逆符号に対応する.

4 無衝突保存量の順カスケード

4.1 スケーリング則

さてこの節では, 2 節に倣った次元解析により, 小スケール ($\ell \ll \rho$) における位相空間乱流のスペクトルを導出する [22].² まず摂動エントロピーの保存から, 慣性領域においてスケールに依らない一定のエントロピー束が小スケールへカスケードすると仮定する. E ではなく W が小スケールにカスケードする理由は後で述べる. (16) 式より

$$w := \frac{v_{th}^2}{\tau_\ell} \left(\frac{g_\ell v_{th}^3}{n_0} \right)^2 = \text{const.} \quad (18)$$

ここで τ_ℓ はスケール ℓ における非線形相関時間, すなわち渦の $E \times B$ 回転周期を表し, (14) 式の非線形項 (Poisson 括弧) から

$$\tau_\ell \sim \left(\frac{\rho}{\ell} \right)^{1/2} \frac{\ell^2 B}{\varphi_\ell} \quad (19)$$

と見積もられる. ここで $(\rho/\ell)^{1/2}$ の因子はポテンシャルのジャイロ平均において, $\rho/\ell \gg 1$ の漸近展開に対応するものである [(15) 式参照]. ここで非線形位相混合の性質 (図 2 参照) から速度空間の相関長が

$$\ell_v \sim \ell \quad (20)$$

を満たすと仮定し, (15) 式の分布関数 h がスケール ℓ_v に対応するランダムな速度依存性をもつとする. このとき (15) 式は積分することができ,

$$\frac{\varphi_\ell}{B} \sim \frac{v_{th}^4}{n_0} g_\ell \ell \quad (21)$$

²ただし, 元々のオーダーリングを乱さない程度に小さいとする. 例えば, $\ell/\rho \sim O(\epsilon^{1/2})$ と考えてもよい.

と見積もられる.³ (18)-(21) 式と $k_{\perp} \sim \ell^{-1}$ から, W と E のスペクトルは

$$\hat{W}(k_{\perp}) \propto k_{\perp}^{-4/3}, \quad \hat{E}(k_{\perp}) \propto k_{\perp}^{-10/3} \quad (22)$$

と求められる. ここでスペクトルは $W = \int \hat{W}(k_{\perp}) dk_{\perp}$, $E = \int \hat{E}(k_{\perp}) dk_{\perp}$ を満たす. (21) 式より, g_{ℓ} の方が φ_{ℓ} よりも $1/\ell$ の次数 (微分の階数に相当する) が高いので, W が小スケールヘカスケード, E は大スケールヘカスケードすると考えてよいことがわかる.

次に, スペクトルのカットオフについて考えてみよう. 慣性領域と散逸領域との境界における位置, 速度空間の相関長をそれぞれ ℓ_c , δv_c とすれば, 散逸が衝突によって実現されることから

$$\frac{1}{\tau_{\ell_c}} \sim \nu \left(\frac{v_{th}}{\delta v_c} \right)^2 \quad (23)$$

が成立する. ここで ν は衝突周波数であり, 衝突が速度空間の拡散型作用素で表されることを用いた. (20) 式より速度空間の相関長は位置空間の相関長と密接に関連しているので, (23) 式は位置空間のカットオフ ℓ_c をも定める. ここで, 通常の流体における Reynolds 数に倣って Dorland 数

$$Do := \frac{1}{\nu \tau_{\rho}} \quad (24)$$

を定義すれば, r 空間, v 空間におけるカットオフのスケールは, 共に

$$\frac{\ell_c}{\rho} \sim \frac{\delta v_c}{v_{th}} \sim Do^{-3/5} \quad (25)$$

で表される.

4.2 直接数値計算

さて, この乱流カスケードの裏付けとして, 周期境界条件の下で AstroGK [23] を用いた直接数値計算の結果を紹介する [7]. g_0 を定数, χ を全 Fourier 成分に白色ノイズを乗せた関数として, 初期条件を

$$g_{\text{init}} = g_0 \left[\cos \left(\frac{2x}{\rho} \right) + \cos \left(\frac{2y}{\rho} \right) + \chi(x, y) \right] F_0(v) \quad (26)$$

によって定める. $\chi = 0$ としたものは Poisson 括弧をゼロにする力学的平衡状態である. 小振幅の χ によって運動論的 Kelvin-Helmholtz 不安定性が起こり, 非線形状態で乱流カスケードが観測される.

無衝突保存量の時間発展を図 4(a) に示す. $t \simeq 10$ で KH 不安定性が飽和し, W が大きく減少している. これは乱流のスペクトルが発展し, 小スケール構造が生成されたことを示唆している. 図 4(b) に $10 < t < 15$ において時間平均された波数スペクトル $\hat{W}(k_{\perp})$, $\hat{E}(k_{\perp})$ を示したが, ここから実際に波数空間でスペクトルが発展し, (22) に整合していることがわかる. 一方図 4(a) で E がほとんど時間変化しないのは, この量が逆カスケードすることを示唆している.

³あとからわかるように, $\ell \ll \rho$ では $g_{\ell} \simeq h_{\ell}$ が成り立つ.

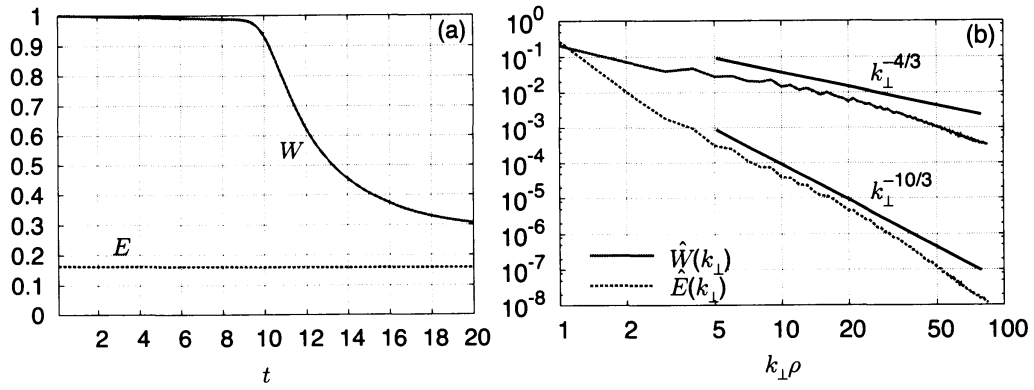


図 4: (a) 無衝突保存量の時間発展と (b) $10 < t < 15$ で時間平均された乱流の波数スペクトル. 図は文献 [7] より.

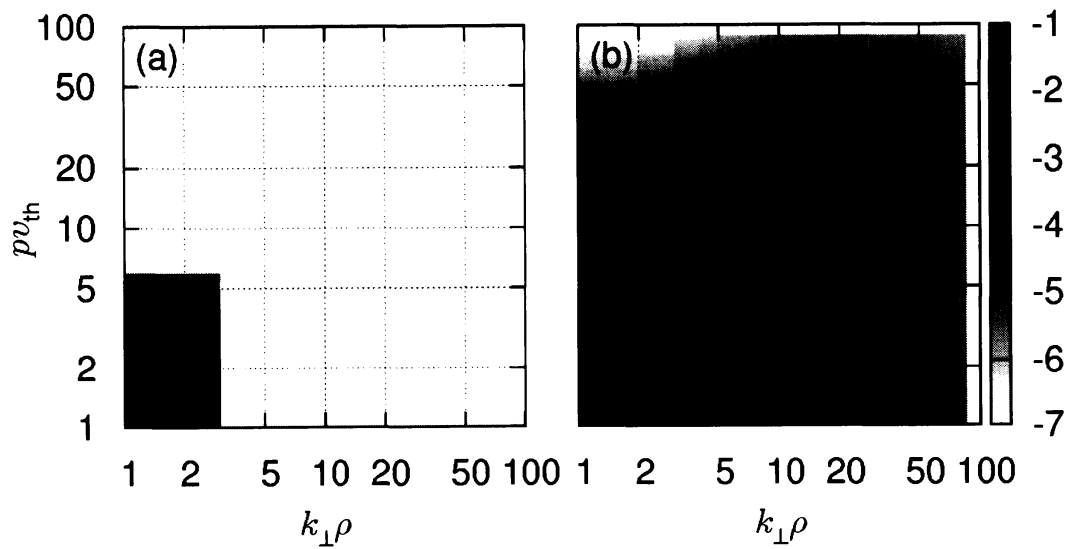


図 5: (a) 初期条件, (b) 発達した乱流において時間平均された, (k_{\perp}, p) 空間中の 2 次元スペクトル $\log_{10}[\hat{W}(k_{\perp}, p)/W]$. 図は文献 [24] より.

次に, (20) 式に表されるような速度空間構造の有無を調べるため, Hankel 変換

$$\check{g}(p) := \int J_0(pv_\perp) g(v_\perp) dv. \quad (27)$$

によって速度空間に波数 p を導入する. 2次元のスペクトル密度

$$\hat{W}(k_\perp, p) := \sum_{|k|=k_\perp} p |\hat{g}(k_\perp, p)|^2 \quad (28)$$

を定義し, シミュレーションにおける時間発展を示したのが図 5 である. (26) 式で示したように, 初期条件では大スケールの揺動しか存在しないが, スペクトルが発展した時間には $k_\perp \rho \simeq pv_{th}$ $[(k_\perp, p)$ 空間の対角線と呼ぶことにする] に沿ってスペクトルが発展していることがわかる.

5 自由減衰乱流における無衝突保存量の減衰則

前節のシミュレーションでは大スケールに初期条件をおいたため, 逆カスケードするスペクトルのピークはすぐに計算領域で最小の波数に達し, E の逆カスケードを観測することはできなかった. ここでは計算できる波数領域の中ほどに初期条件をおき, スペクトルのピークが最小波数に至る手前まで時間発展を追う, 自由減衰乱流について考察し, 無衝突保存量の時間的な減衰則を導出する.

通常の流体では3次元のスペクトルは $k^{-5/3}$ であって, 無限小スケール ($k \rightarrow \infty$) まで積分しても有限であるため, エネルギーは有限時間 (散逸スケールがいくら小さくてもほぼ同じ時間) でスペクトルを埋め尽くすことができる. 従ってエネルギーは必ず時間的に減衰する. ところが2次元のエンストロフィースペクトルは k^{-1} であり, このスペクトルを無限積分すると発散するため, 散逸スケールが極めて小さい場合には, いつまで経ってもこのスケールまでエンストロフィーが到達しない, ということが起こりうる. 従ってエンストロフィーは粘性が消える極限でも減衰しない可能性がある. ここではエントロピーのスペクトルは $k_\perp^{-4/3}$ であり, 積分が有限になるため通常の流体の3次元の場合に対応すると考えられる.

まず, 揺動がスケール長 l_* に対応する波数 k_* にピークをもち, 無衝突保存量がほぼこのピークで支配されていると仮定する. このときこのスケールにおける g と φ の特徴的な振幅をそれぞれ g_* , φ_* とすると

$$W \propto g_*^2, \quad E \propto \varphi_*^2 \quad (29)$$

と書ける. 揺動の2次元スペクトルが (k_\perp, p) 平面内の対角線上に集中していると仮定すれば, 2つの無衝突保存量 W と E の間に

$$W \propto k_* E \quad (30)$$

なる関係が成り立つことがいえる.

ここで衝突が小さい極限を考え、逆カスケードする E は減衰せず、順カスケードする W はスケール l_* における非線形相関時間 τ_* で順カスケードして、散逸領域において同じ割合で減衰すると仮定する:

$$\frac{dE}{dt} \sim 0, \quad \frac{dW}{dt} \sim -\frac{W}{\tau_*}. \quad (31)$$

ここで非線形相関時間は (19) 式から

$$\tau_* \propto k_*^{-3/2} \varphi_*^{-1} \quad (32)$$

と書ける. するとこれらの関係式から、無衝突保存量とスペクトルのピークに関する、時間についてのスケーリング則が導かれる:

$$E \sim \text{const.}, \quad W \propto k_* \propto t^{-2/3}. \quad (33)$$

ここで、無衝突極限として考えても良い程度に衝突が小さい、というのは l_* における非線形性に比べて、ということであって、衝突が強くなると (31) 式が成り立たなくなる. そこで (31) の第 2 式を

$$\frac{dW}{dt} \sim -\frac{W}{\tau_*} - \nu(k_*\rho)^2 W \quad (34)$$

と変更して衝突の効果を加える必要がある.⁴ ここで (34) 式の右辺第 1 項と第 2 項の比を取って局所 Dorland 数

$$Do_* := \frac{1}{\nu\tau_*(k_*\rho)^2} \quad (35)$$

を定義する. Do_* が 1 程度のときには、スケール l_* において衝突と非線形性が釣り合っており、 Do_* が大きいときには (24) 式と同様非線形性が強いと考えられる. この無次元数を用いると、上で述べた衝突が弱い場合、というのは $Do_* \gg 1$ の場合、といいかえることができる.

さて、では衝突の影響が大きい $Do_* \lesssim 1$ の場合にはどうなるであろうか? このとき (31) 式は無効となる. 代わりに、(34) 式第 2 項から

$$k_* \propto \frac{W}{E} \propto t^{1/2} \quad (36)$$

が得られる. さらに $Do_* \sim 1$ で (34) 式右辺の両項がバランスする場合には、 E と W の時間発展が個別に得られて

$$E \propto k_* \propto t^{-1/2}, \quad W \propto t^{-1} \quad (37)$$

と求められる. $Do_* \lesssim 1$ の場合、 E の時間発展は

$$\frac{dE}{dt} \sim -\nu(k_*\rho)^2 E \quad (38)$$

となり、(36)-(37) 式と整合する.

⁴スペクトルは (k_\perp, p) 平面の対角線上に集中しているので、速度空間の 2 階微分は位置空間の 2 階微分に等しい.

6 まとめ

本稿では、磁化プラズマにおける位相空間乱流について最近の研究を紹介した。磁力線方向に変化がない2次元の揺動について、Boltzmann 方程式を簡約化したジャイロ運動論を用いることで、静電乱流は位相空間内のエントロピーカスケードと理解できる。速度空間の構造は非線形位相混合によって生成されることに鑑み、通常の流体における Kolmogorov のスケールリング則を拡張した次元解析から、波数スペクトルを求めることができる。AstroGK を用いた直接数値計算は、このスケールリング則を支持する結果を示す。

2次元の場合、保存量は少なくとも2つ [W と E ; (16)-(17) 式参照] 存在するが、このうち W は小スケールへ、 E は大スケールへとカスケードする。支配方程式 (14)-(15) 式が、大スケールの極限で2次元の NS 方程式に漸近することは本文中にも述べたが、これら保存量の接続についても文献 [21] で説明が試みられている。自由減衰乱流においては、簡単な議論から無衝突保存量に関する減衰則を導くことができる。シミュレーションからもこの減衰則を支持する結果を得ているが、それは他の論文で紹介することにする。

本稿では位置空間と速度空間の相関 [(20) 式参照] がよく成り立つことを示したが、この関係が崩れる場合も存在する [25]。文献 [25] では、位置空間と速度空間の独立性からスケール空間が2次元になり、 W と E の双方ともに小スケールへ移送される可能性があることも示されている。また他に、同じ2次元運動を絶対平衡という観点から取り扱った問題 [26] や、トカマク型の3次元形状におけるシミュレーション [27]、太陽風における電磁的な問題 [28] についても研究が行われている。

参考文献

- [1] E. Mazzucato, D. R. Smith, R. E. Bell *et al.*: Phys. Rev. Lett. **101**, 075001 (2008).
- [2] A. D. Gurchenko, E. Z. Gusakov, D. V. Kouprienko *et al.*: Plasma Phys. Control. Fusion **53**, 035010 (2010).
- [3] S. D. Bale, P. J. Kellogg, F. S. Mozer *et al.*: Phys. Rev. Lett. **94**, 215002 (2005).
- [4] F. Sahraoui, M. L. Goldstein, P. Robert *et al.*: Phys. Rev. Lett. **102**, 231102 (2009).
- [5] O. Alexandrova, J. Saur, C. Lacombe *et al.*: Phys. Rev. Lett. **103**, 165003 (2009).
- [6] P. Helander and D. J. Sigmar: *Collisional Transport in Magnetized Plasmas* (Cambridge, 2002).
- [7] T. Tatsuno, W. Dorland, A. A. Schekochihin *et al.*: Phys. Rev. Lett. **103**, 015003 (2009).
- [8] A. N. Kolmogorov: Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 299 (1941); *ibid* **32**, 16 (1941) [English translation: Proc. Roy. Soc. London A **434**, 9 (1991); *ibid* **434**, 15 (1991)].

- [9] U. Frisch: *Turbulence* (Cambridge, 1995).
- [10] M. Lesieur: *Turbulence in Fluids* (Springer, 2008).
- [11] R. Fjørtoft: *Tellus* **2**, 225 (1953).
- [12] R. H. Kraichnan: *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
- [13] P. Catto: *Plasma Phys.*, **20**, 719 (1978).
- [14] E. A. Frieman and L. Chen: *Phys. Fluids* **25**, 502 (1982).
- [15] 洲鎌 英雄: プラズマ・核融合学会誌 **79**, 107 (2003).
- [16] G. G. Howes S. C. Cowley, W. Dorland *et al.*: *Astrophys. J.* **651**, 590 (2006).
- [17] A. J. Brizard and T. S. Hahm: *Rev. Mod. Phys.* **79**, 421 (2007).
- [18] I. Abel, M. Barnes, S. C. Cowley *et al.*: *Phys. Plasmas* **15**, 122509 (2008); M. Barnes, I. Abel, W. Dorland *et al.*: *Phys. Plasmas* **17**, 072107 (2009).
- [19] W. Dorland and G. W. Hammett: *Phys. Fluids B* **5**, 812 (1993).
- [20] J. B. Taylor and B. McNamara: *Phys. Fluids* **14**, 1492 (1971).
- [21] G. G. Plunk *et al.*: *J. Fluid Mech.* **664**, 407 (2010).
- [22] A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, W. Dorland *et al.*: *Plasma Phys. Control. Fusion* **50**, 124024 (2008).
- [23] R. Numata, G. G. Howes, T. Tatsuno *et al.*: *J. Comput. Phys.* **229**, 9347 (2010).
- [24] T. Tatsuno, M. Barnes, S. C. Cowley *et al.*: *J. Plasma Fus. Res. SER.* **9**, 509 (2010).
- [25] G. G. Plunk and T. Tatsuno: *Phys. Rev. Lett.* **106**, 165003 (2011).
- [26] J.-Z. Zhu and G. W. Hammett: *Phys. Plasmas* **17**, 122307 (2010).
- [27] A. Bañón Navarro, P. Morel, M. Albrecht-Marc *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **106**, 055001 (2011).
- [28] G. G. Howes, J. M. TenBarge, W. Dorland *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **107**, 035004 (2011).